ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 42, Nos. 1-2, 1982

PRIMARITE DE $L^p(L^r)$, $1 < p, r < \infty$

PAR
MICHELE CAPON

ABSTRACT

In this article we show that $L^p(L^r)$ is primary for p and r in $]1, +\infty[$. If $(h_k)_{k \geq 1}$ denote the Haar basis, we begin with a study of the sequence $(h_k \otimes h_i)$ and, in particular, the space generated by a subsequence of this sequence. In the first part we study the base of $L^p(L^r)$ and in the second part we show that this space is primary.

Le but de cet article est de montrer que l'espace $L^p(L^r)$ est primaire pour p et r dans $]1, +\infty[$. Si on désigne par (h_k) la suite de Haar, nous commencerons par étudier la suite de fonctions $(h_k \otimes h_i)$ et en particulier l'espace engendré par une sous-suite de cette suite. Dans la première partie nous étudierons donc la base de $L^p(L^r)$ et dans la seconde nous démontrerons plus particulièrement la primarité de cet espace.

I. Etude de la base de $L^p(L^r)$

Il est clair que la suite $(h_k \otimes h_i)$ engendre $L^p(L^r)$. Nous allons montrer que cette suite est une base inconditionnelle de $L^p(L^r)$.

PROPOSITION I.1. *Pour $1 < p$, $r < \infty$, la suite $(h_k \otimes h_i)_{k \geq 1, i \geq 1}$ est une base inconditionnelle de $L^p(L^r)$.*

DÉMONSTRATION. Nous adoptons la définition donnée par Aldous [1] de la propriété I_p et nous commençons par montrer que L^r possède la propriété I_p, c'est-à-dire que pour toute suite finie (x_k) de L^r on a

$$\left\| \sum_k h_k \otimes x_k \right\|_{L^p(L^r)} \approx \left\| \sum_k \pm h_k \otimes x_k \right\|_{L^p(L^r)}.$$

Le symbole $\approx$ signifie que le rapport des deux normes est majoré et minoré indépendamment de (x_k).

Received December 22, 1980 and in revised form June 10, 1981

On suit, d'après une remarque de Pisier en [6], par exemple, que la propriété "X possède I_p" est indépendante de p dans $]1,\infty[$. Il suffit donc de montrer que L^r possède I_r

$$\left\| \sum_k h_k \otimes x_k \right\|^r_{L^r(L^r)} = \int\int \sum_k |h_k(t)x_k(u)|^r dtdu.$$

Pour chaque u fixé on utilise l'inconditionnalité de la suite de Haar dans L^r

$$\int \left| \sum_k h_k(t)x_k(u) \right|^r dt \approx \int \left| \sum_k \pm h_k(t)x_k(u) \right|^r dt.$$

On intègre alors par rapport à u et on obtient le résultat cherché. Par un calcul analogue à celui de [3], lemme I, 0 on montre assez facilement, à l'aide des inégalités de Kahane, voir [7], et de Khintchine que

$$\left\| \sum_{k,i} \alpha_{ki} h_k h_i \right\|^p_{L^p(L^r)} \approx \int dt \left\{ \int \left[\sum_{k,i} \alpha^2_{ki} h^2_k(t) h^2_i(u) \right]^{r/2} du \right\}^{p/r}.$$

Cette expression ne dépend que du carré des coéfficients α_{ki} et ceci montre que la suite est une base inconditionnelle. CQFD

La seconde proposition nous permet de comparer deux suites de fonctions qui ont presque même valeur absolue.

PROPOSITION I.2. *Soient $(Z_{k,n})$ et $(Z'_{k,n})$ deux suites basiques inconditionnelles de $L^p(L^r)$ telles que*

(a) *(Z_{kn}) et (Z'_{kn}) sont dans L^∞.*

(b) *Sauf sur un ensemble de mesure $\varepsilon_{k,n}$ on a $Z_{kn} = Z'_{kn}$.*

(c) *$\Sigma_{k,n}\, \varepsilon_{kn}^{1/r \vee p}(\| Z_{kn} \|_\infty \| Z^*_{kn} \| + \| Z'_{kn} \|_\infty \| Z'^*_{kn} \|) < 1$ alors les suites (Z_{kn}) et (Z'_{kn}) sont équivalentes dans $L^p(L^r)$.*

DÉMONSTRATION. Explicitons l'énoncé. Si Z désigne l'espace engendré par la suite (Z_{kn}), la suite (Z^*_{kn}) est la suite de Z^* qui est biorthogonale à la suite (Z_{kn}). Si Z^*_{kn} désigne un élément de $L^q(L^s)$ qui prolonge cette forme linéaire on aura $\| Z^*_{kn} \| \leqq \| Z^*_{kn} \|_{L^q(L^s)}$ où s et q sont les exposants conjugués de r et p.

Dans une première étape, supposons $\varepsilon_{kn} = 0$ et soit (α_{kn}) une famille de réels presque tous nuls.

Posons $\Delta^p = \| \Sigma_{k,n}\, \alpha_{kn} Z_{kn} \|^p$.

En utilisant l'inconditionnalité de la suite et en désignant par (ε_n) la suite des fonctions de Rademacher, on obtient

$$\Delta^p \approx \int\int \left\| \sum_{k,n} \alpha_{kn} \varepsilon_k(s) \varepsilon_n(v) Z_{kn} \right\|^p_{L^p(L^r)} dsdv.$$

Pour t fixé, posons

$$A(t)=\iint \Big\| \sum_{k,n} \alpha_{kn}\varepsilon_k(s)\varepsilon_n(v)Z_{k,n}(t,\cdot)\Big\|_{L^r}^p dsdv.$$

En utilisant les inégalités de Kahane [7], on a

$$A(t)\approx\left\{\iint \Big\| \sum_{k,n} \alpha_{kn}\varepsilon_k(s)\varepsilon_n(v)Z_{k,n}(t,\cdot)\Big\|_{L^r}^r dsdv\right\}^{p/r}$$

$$=\left\{\iiint \Big| \sum_{k,n} \alpha_{kn}\varepsilon_k(s)\varepsilon_n(v)Z_{kn}(t,u)\Big|^r dsdvdu\right\}^{p/r}.$$

Les inégalités de Khintchine généralisées nous donnent

$$A(t)\approx\left\{\int \Big(\sum_{k,n} \alpha_{kn}^2 Z_{kn}^2(t,u)\Big)^{r/2} du\right\}^{p/r}.$$

Comme $\Delta^p=\int A(t)dt$ et que cette expression ne dépend que du carré de Z_{kn}, la proposition est immédiate dans ce cas.

Supposons maintenant $\varepsilon_{kn}>0$ et posons

$$E_{kn}=\{(t,u);|Z_{kn}(t,u)|=|Z'_{kn}(t,u)|\}.$$

On a $\|Z_{kn}-Z_{kn}\mathbf{1}_{E_{kn}}\|\leqq\|Z_{kn}\|\,\|1-\mathbf{1}_{E_{kn}}\|_{L^p(L^r)}$.

On montre aisément que $\|1-\mathbf{1}_{E_{kn}}\|\leqq\varepsilon_{kn}^{1/rvp}$.

En utilisant la condition (c) on obtient l'équivalence des suites (Z_{kn}) et $(Z_{kn}\mathbf{1}_{E_{kn}})$ et aussi de (Z'_{kn}) et $(Z'_{kn}\mathbf{1}_{E_{kn}})$.

On peut appliquer la première partie de la démonstration aux suites $(Z_{kn}\mathbf{1}_{E_{kn}})$ et $(Z'_{kn}\mathbf{1}_{E_{kn}})$ et on en déduit l'équivalence des suites (Z_{kn}) et (Z'_{kn}).

Nous pouvons maintenant aborder le résultat principal de ce paragraphe.

NOTATIONS. P désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Si f est une fonction, Supp f désigne le support de f. On pose $B_k=\operatorname{Supp} h_k$.

Si Φ est une partie de $\mathbb{N}$,

$$\hat{\Phi}=\left\{t\in[0,1];\ \limsup_{k\to\infty}|h_k(t)|=1\right\}.$$

THÉORÈME 1.3. *Soit $(h_k\otimes h_i)_{i\geqq1,k\in\Phi_i}$ une sous suite de la base $(h_k\otimes h_i)$. Pour chaque t dans $[0,1]$ on pose: $M_t=\{i;t\in\hat{\Phi}_i\}$.*

Si $A=\{t;P(\hat{M}_t)\geqq\frac{1}{2}\}$ est de mesure positive alors la suite $(h_k\otimes h_i)_{i\geqq1,k\in\Phi_i}$ engendre un espace isomorphe à $L^p(L^r)$.

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait en quatre étapes que nous allons énumérer et que nous détaillerons ultérieurement. Elles ont pour but de construire, dans l'espace engendré, un espace Z isomorphe à $L^p(L^r)$ et complémenté dans $L^p(L^r)$.

Etape 1. Pour chaque t dans A, nous construisons une suite bloc $(b_{k,t})_{k\geqq 2}$ de la suite $(h_i)_{i\in M_t}$ qui reproduit "presque" un système de Haar sur $\hat{M}_t$. Nous désirons en outre que cette construction se fasse de façon mesurable en t. Plus précisément les suites (b_{kt}) vérifient:

(a) Pour tout t et tout k, b_{kt} est un bloc fini: $b_{kt} = \sum_{i\in\sigma_{kt}} h_i$, où σ_{kt} est une partie finie de M_t formée de fonctions à supports disjoints.

(b) Pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$ et tout k, $\{t\,;\sigma_{kt} = J\}$ est mesurable.

(c) La suite $(b_{kt})_{k\geqq 2}$ est K équivalente à la suite $(h_k)_{k\geqq 2}$ avec une constante K indépendante de t. En outre, il existe des nombres λ'_1 et λ'_2 indépendants de t tels que si on pose

$$d_{1t} = \mathbf{1}_{\hat{M}_t} \quad \text{et} \quad d_{kt} = b_{kt}\mathbf{1}_{\hat{M}_t}$$

alors $\lambda'_1 P(B_k) \leqq P(\operatorname{Supp} d_{kt}) \leqq \lambda_2 P(B_k)$ et $d_{kt} = b_{kt}$ sauf sur un ensemble de mesure ε_k.

REMARQUE 1. Si ε_k est assez petit on voit qu'on aura aussi $\lambda_1 P(B_k) \leqq P(\operatorname{Supp} b_{kt}) \leqq \lambda_2 P(B_k)$ où λ_1 et λ_2 sont indépendants de k et t.

Etape 2. Conformément aux définitions de Lindenstrauss et Tzafriri [5, page 178] nous appellerons arbre sur A une famille $(A_{i_1,\cdots,i_n})$ où $(i_1,\cdots,i_n)$ parcourt $\{0,1\}^{(\mathbb{N})}$ et telle que $A = A_0 \cup A_1$

$$A_{i_1,\cdots,i_n} = A_{i_1,\cdots,i_n,0} \cup A_{i_1,\cdots,i_n,1},$$
$$P(A_{i_1,\cdots,i_{n+1}}) = \tfrac{1}{2}P(A_{i_1,\cdots,i_n}).$$

Etant donné un arbre sur A on peut lui associer une suite de fonctions qui reproduit exactement le système de Haar en posant

$$f_1 = \mathbf{1}_A, \quad f_2 = \mathbf{1}_{A_0} - \mathbf{1}_{A_1}, \quad f_3 = \mathbf{1}_{A_{00}} - \mathbf{1}_{A_{01}}, \quad \text{etc.}$$

Par la méthode donnée par Gamlen et Gaudet [4] et Lindenstrauss et Tzafriri [5] on peut construire une suite de blocs finis $(g_l)_{l\geqq 2}$ de la suite de Haar et une suite $(f_l)_{l\geqq 1}$ associée à un arbre T sur A telles que $\|g_l - f_l\|_{L^p} < \varepsilon_l$, $g_l = f_l$ sauf sur un ensemble de mesure ε_l.

Si $\mathcal{A}$ désigne la tribu engendrée par l'arbre T, il est clair que la suite $(f_l)_{l\geqq 1}$ engendre dans L^p l'espace $L^p(A,\mathcal{A})$ et si ε_l est assez petit la suite $(g_l)_{l\geqq 2}$ est K équivalente à la suite $(h_l)_{l\geqq 2}$. En outre on peut encore supposer que ces résultats sont vrais pour l'exposant q, conjugué de p.

Etape 3. On se donne des nombres $\varepsilon_{kl} > 0$. On construit, en utilisant l'étape 1, une suite $(Z_{lk})_{l\geqq 2, k\geqq 2}$ de blocs de la suite $(h_k \otimes h_i)_{i\geqq 1, k\in\Phi_l}$ telle que $|Z_{lk}(t,u)| = 0$ ou 1 et $|Z_{lk}(t,u)| = |f_l(t)b_{kt}(u)|$ sauf sur un ensemble de mesure ε_{kl}.

En utilisant la proposition I.2 et en prenant (ε_{kl}) assez petit on en déduira l'équivalence des deux suites à la fois dans $L^p(L^r)$ et $L^q(L^s)$. On montrera alors que l'espace Z engendré dans $L^p(L^r)$ par la suite (Z_{lk}) est isomorphe à $L_0^p(L_0^r)$, donc aussi à $L^p(L^r)$. (Le symbole L_0^p désigne les éléments de L^p d'intégrales nulles.)

Etape 4. Rappelons que la suite biorthogonale à (h_k) est définie par $h_k^* = h_k/P(B_k)$ et de la même façon $f_l^* = f_l/P(\operatorname{Supp} f_l)$. De même posons $Z_{lk}^* = Z_{lk}/P(\operatorname{Supp} Z_{lk})$. C'est une suite de fonctions sur $[0,1]\times[0,1]$ et, considérée comme suite de Z^*, elle forme la suite biorthogonale à (Z_{lk}).

Dans cette étape nous montrerons essentiellement trois propriétés:

(α) Les suites (Z_{lk}^*) et $(f_l^* \otimes h_k^*)$ sont des suites de fonctions dans $L^q(L^s)$ qui sont équivalentes.

(β) Soit F l'espace engendré dans $L^p(L^r)$ par $(f_l \otimes h_k)_{l\geqq 2, k\geqq 2}$. Let suites $(f_l^* \otimes h_k^*)_{l\geqq 2, k\geqq 2}$ de F^* et Z_{lk}^* de Z^* sont équivalentes.

(γ) L'injection naturèlle de F^* dans $L^q(L^s)$ est continue. C'est-à-dire que si $\varphi = \Sigma_{k,l}\alpha_k f_l^* \otimes h_k^*$ alors $\|\varphi\|_{F^*} \approx \|\varphi\|_{L^q(L^s)}$.

Ces trois propriétés nous permettrons de montrer que l'injection naturelle de Z^* dans $L^q(L^s)$ est continue et par conséquent que Z est complémenté dans $L^p(L^r)$.

Ayant construit dans l'espace engendré par la suite $(h_k \otimes h_i)_{i\geqq 1, k\in\Phi_l}$, un espace Z isomorphe à $L^p(L^r)$ et complémenté dans $L^p(L^r)$, le théorème I.3 est une conséquence de la méthode de décomposition de Pelczynski.

Revenons maintenant aux étapes 1, 3 et 4.

Etape 1 — *Construction des suites* (b_{kt})

Pour t fixé, on définit des familles d'indices $\mathscr{F}^{1,t}, \cdots, \mathscr{F}^{n,t}$ dans M_t par

$$\mathscr{F}^{1,t} = \{k \in M_t\,;\, P(B_k \cap \hat{M}_t) > 0 \text{ et si } B_j \supsetneqq B_k \text{ alors } j \notin M_t\},$$

$$\mathscr{F}^{2,t} = \{k \in M_t\,;\, P(B_k \cap \hat{M}_t) > 0 \text{ et } \exists!\, j \in \mathscr{F}^{1,t} \text{ tel que } B_j \supsetneqq B_k\},$$

$$\mathscr{F}^{n,t} = \{k \in M_t\,;\, P(B_k \cap \hat{M}_t) > 0 \text{ et } \exists!\, j \in \mathscr{F}^{n-1,t} \text{ tel que } B_j \supsetneqq B_k\}.$$

$\mathscr{F}^{n,t}$ est formé des indices de M_t qui sont les $n^{\text{ièmes}}$ indices, l'ordre étant celui induit par l'inclusion des B_k, tels que B_k rencontre "effectivement" $\hat{M}_t$. Ces familles $\mathscr{F}^{n,t}$ sont disjointes par définition et pour tout n, $\{B_k\,;\, k \in \mathscr{F}^{n,t}\}$ est une famille disjointe.

Nous démontrons d'abord deux lemmes.

LEMME I.4. *Si on pose* $S_{n,t} = \bigcup_{k \in \mathscr{F}^{n,t}} B_k$, S_{nt} *est une suite décroissante et* $\bigcap_n S_{nt} = \hat{M}_t$ *presque sûrement.*

DÉMONSTRATION. La décroissance est immédiate et par définition de $\hat{M}_t$ on a $\bigcap_n S_{nt} \subset \hat{M}_t$. Il suffit donc de montrer que pour tout n $S_{nt} \supset \hat{M}_t$ p.s.

Soit u un point de $\hat{M}_t$ et $i_n(u)$ le $n^{\text{ième}}$ indice k dans M_t tel que $|h_k(t)| = 1$. Si $i_n(u)$ est dans $\mathscr{F}^{nt}$ alors u est dans S_{nt}, sinon c'est que $P(B_{i_n(u)} \cap \hat{M}_t) = 0$ donc $M_t \setminus S_{nt} \subset \bigcup_{j \in J} (B_j \cap \hat{M}_t)$ où $J = \{j; P(B_j \cap \hat{M}_t) = 0\}$.

Il est alors évident que $P(M_t \setminus S_{nt}) = 0$. CQFD

LEMME I.5. *Pour tout* i *et* n *fixés,* $A_{i,n} = \{t; i \in \mathscr{F}^{nt}\}$ *est mesurable.*

DÉMONSTRATION. On le fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on a

$$A_{i,1} = \{t; i \in M_t, \forall_j \text{ tel que } B_j \supsetneqq B_i, j \notin M_t \text{ et } P(B_i \cap \hat{M}_t) > 0\}$$

$$= \{t; t \in \hat{\Phi}_i \text{ et } t \notin \hat{\Phi}_j \text{ si } B_j \supsetneqq B_i\} \cap \{t; P(B_i \cap \hat{M}_t) > 0\}.$$

Le premier ensemble est mesurable et pour le second on remarque qu'il s'identifie à $\{t; \int \limsup_{l \to \infty} |h_i(u)h_l(u)| \mathbf{1}_{\Phi_l}(t) du > 0\}$.

Or, la fonction $F(t, u) = \limsup_{l \to \infty} |h_i(u)h_l(u)| \mathbf{1}_{\Phi_l}(t)$ est borélienne et bornée donc la fonction $G(t) = \int F(t, u) du$ est mesurable et le lemme est donc vrai pour $n = 1$.

Supposons qu'il est vrai pour $(n-1)$ on écrit

$$A_{in} = \{t; \exists j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-1} < i \text{ tel que } t \in A_{j_k k} \text{ et } \forall k < n \text{ et } j \neq j_k, t \notin A_{j,k}\}$$

$$\cap \{i \in M_t \text{ et } P(B_i \cap \hat{M}_t) > 0\}.$$

Le calcul fait pour $n = 1$ et la récurrence nous donne immédiatement la mesurabilité de cet ensemble.

Nous pouvons maintenant aborder la construction. Donnons-nous des nombres $\delta_n > 0$. Le lemma I.5 nous donne immédiatement la mesurabilité des fonctions $\varphi_n(t) = P(S_{nt})$ et $\varphi(t) = P(\hat{M}_t)$. On a pour tout n fixé $\lim_{j \to \infty} \sum_{k \leq j, k \in \mathscr{F}^{nt}} P(B_k) = P(S_{nt})$.

On peut supposer, au besoin en diminuant A, qu'il existe des entiers N_n tels que $\sum_{k \leq N_n, k \in \mathscr{F}^{nt}} P(B_k) > P(S_{nt}) - \delta_n$ pour tout t dans A.

D'autre part, on a $\lim_{n \to \infty} P(S_{nt}) = P(\hat{M}_t)$, on peut donc aussi supposer qu'il existe une suite (k_n) d'entiers tels que $P(S_{k_n t}) - P(\hat{M}_t) < \delta_n$ pour tout t dans A.

Construisons d'abord une suite auxiliaire $\tilde{b}_{kt}$ en utilisant la méthode de Gamlen et Gaudet $\tilde{b}_{2t} = \sum_{i \in \mathscr{F}^{k_1,t}} h_i$.

Supposons construit $\tilde{b}_{kt}$ pour $k \leqq 2^{j-1}$, alors si $2^{j-2} < l \leqq 2^{j-1}$ on pose

$$\tilde{b}_{2l-1,t} = \sum_{\substack{i \in \mathcal{F}^{k_j t} \\ B_i \subset \operatorname{Supp} \tilde{b}^+_{l,t}}} h_i \quad \text{et} \quad h_{2l,t} = \sum_{\substack{i \in \mathcal{F}^{k_j t} \\ B_i \subset \operatorname{Supp} \tilde{b}^-_{l,t}}} h_i .$$

La démonstration de Gamlen et Gaudet montre que cette suite $\tilde{b}_{kt}$ vérifie la condition (c) de l'étape 1.

Nous poserons alors, si $\tilde{b}_{kt} = \sum_{i \in \tilde{\sigma}_{kt}} h_i$

$$\sigma_{kt} = \{ i \in \tilde{\sigma}_{kt} \text{ et } i \leqq N_{k_j} \text{ si } 2^{j-1} < k \leqq 2^j \} \quad \text{et} \quad b_{kt} = \sum_{i \in \sigma_{kt}} h_i .$$

On a donc $b_{kt} = \tilde{b}_{kt}$ sauf sur un ensemble de mesure $\delta_{k_j} \leqq \delta_j$ pour tout k entre 2^{j-1} et 2^j. Si les nombres δ_j sont assez petits la condition (c) sera encore vérifiée. La condition (a) est évidente et pour (b) il suffit de montrer que $\{t ; i \in \tilde{\sigma}_{kt}\}$ est mesurable. Pour $k = 2$ ceci est évident, grâce au lemma I.5.

Supposons que c'est vrai pour tout $k \leqq 2^{j-1}$ et fixons k dans $]2^{j-2}, 2^{j-1}]$ alors

$$\{t ; i \in \tilde{\sigma}_{2k-1,t}\} = \{t ; i \in \mathcal{F}^{k_j t} \text{ et } \exists i' \in \tilde{\sigma}_{kt} \text{ tel que } B_i \subset \operatorname{Supp} h^+_{i'}\}.$$

L'hypothèse de récurrence et le lemme I.5 montrent que cet ensemble est mesurable. De même on démontrerait que $\{t ; i \in \tilde{\sigma}_{2k,t}\}$ est mesurable et par conséquent, on atteint ainsi tous les entiers inférieurs à 2^j. Ceci achève donc la construction annoncée dans l'étape 1. Nous allons maintenant expliciter l'étape 3.

Etape 3 — *Construction de la suite* Z_{lk}

On ordonne $\mathbb{N}^2$ suivant l'ordre de Cantor et on suppose construit les $Z_{m,n}$ pour $(m, n) < (l, k)$ de façon que chaque $Z_{m,n}$ soit un bloc fini de la suite $(h_k \otimes h_i)_{i \geq 1, k \in \Phi_i}$ et que les conditions demandées à l'étape 3 soient vérifiées.

Fixons l et k et posons $N_0 = \max\{j ;\ h_j$ apparaît dans un des blocs $Z_{l',k'}$, $(l', k') < (l, k)\}$. Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération des parties finies de $\mathbb{N}$ et posons $\Omega_n = \{t ; t \in \operatorname{Supp} f_l \text{ et } \sigma_{kt} = I_n\}$. D'après la premiére étape on sait que $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ est une partition mesurable du support de f_l. On peut donc trouver un entier N_1 tel que $P(\bigcup_{n=N_1+1}^{\infty} \Omega_n) < \varepsilon_{kl}/2$.

En remplaçant chaque $(\Omega_n)_{n \leq N_1}$ par un compact contenu dans Ω_n de mesure très proche, on peut supposer que les $(\Omega_n)_{n \leq N_1}$ sont à une distance $\delta > 0$ les uns des autres et que l'on a encore

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N_1} \Omega_n \right) > P(\operatorname{Supp} f_l) - \varepsilon_{kl}/2.$$

Cette remarque nous permet de trouver un entier N_0' tel que si $j \geqq N_0'$, B_j rencontre au plus un des ensembles $(\Omega_n)_{n \leqq N_1}$. Par construction des Ω_n on a: $\Omega_n \subset \hat{\Phi}_i \quad \forall i \in I_n$. Ceci est encore vrai si je remplace Φ_i par $\Phi_i \cap [\max(N_0, N_0'); +\infty[$.

La méthode de construction donnée par Gamlen et Gaudet [4] nous permet de construire pour chaque $n \leqq N_1$ et chaque i dans I_n une fonction y_i^n telle que:

(α_0) y_i^n soit un bloc fini de la suite $\{h_j\,;\ j \in \Phi_i,\ j \geqq \max(N_0, N_0')\}$.

(β_0) Si i appartient à $I_m \cap I_n$ alors y_i^n et y_i^m sont des blocs disjoints de la suite de Haar.

(γ_0) $|y_i^n| = 0$ ou 1.

(δ_0) $|y_i^n| = \mathbf{1}_{\Omega_n}$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\varepsilon_{kl}/2\sum_{n=1}^{N_1} \operatorname{card} I_n$.

On pose alors $Z_{lk}(t,u) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{i \in I_n} y_i^n(t) h_i(u)$. On vérifie facilement que les fonctions $y_i^n(t)h_i(u)$ sont à support disjoints (grâce à (α_0) et au fait que $\{h_i\,;\ i \in I_n\}$ est une famille à support disjoint, sauf si Ω_n est vide).

Z_{lk} est un bloc fini de la suite donnée et il est disjoint des blocs précédemment construits.

Enfin, la condition (δ_0) et le choix de N_1 permet de montrer que $|Z_{lk}(t,u)| = |f_l(t) b_{kt}(u)|$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à ε_{kl}. Avant d'achever l'étape 3, nous allons donner un lemme qui nous sera utile.

Lemme I.6. *Si ε_{kl} est assez petit, alors on a*

$$\frac{\lambda_1}{2} P(\operatorname{Supp} f_l) P(B_k) \leqq P(\operatorname{Supp} Z_{lk}) \leqq 2\lambda_2 P(\operatorname{Supp} f_l) P(B_k).$$

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur. Il suffit de choisir ε_{kl} de façon que $\frac{1}{2} \leqq P(\operatorname{Supp} Z_{lk})/P(\operatorname{Supp} f_l \otimes b_{kt}) \leqq 2$. Ceci est facile quand on remarque que

$$P(\operatorname{Supp} f_l \otimes b_{kt}) \geqq P(A) \lambda_1 P(B_l) P(B_k)$$

et que le second nombre ne dépend que de l, k et $P(A)$.

Proposition I.7. *La suite $(Z_{lk})_{l \geqq 2, k \geqq 2}$ est équivalente dans $L^p(L^r)$ à la suite $(h_l \otimes h_k)_{l \geqq 2, k \geqq 2}$. Elle engendre un espace Z isomorphe à $L^p(L^r)$.*

Démonstration. Pour chaque t fixé, les suites (b_{kt}) et (h_k) sont K-équivalentes dans L^r, donc les suites $(f_l \otimes b_{kt})$ et $(f_l \otimes h_x)$ sont aussi K-équivalentes dans $L^p(L^r)$. Comme cette dernière est une suite inconditionnelle dont la constante ne dépend que de $P(A)$, on en déduit l'inconditionnalité de $(f_l \otimes b_{kt})$ et $\|f_l^* \otimes b_{kt}^*\| \leqq K \|f_l^* \otimes h_k^*\|$. Cette quantité ne dépend donc que de l, k et $P(A)$.

D'autre part, la suite (Z_{lk}) est inconditionnelle, car c'est une suite bloc de la base, et on a

$$\|Z_{lk}^*\| \leqq \frac{\|Z_{lk}\|_{L^q(L^s)}}{P(\operatorname{Supp} Z_{lk})}.$$

Le lemme I.6 montre que cette quantité ne dépend que de l, k et $P(A)$. On peut donc appliquer la proposition I.2 et si ε_{kl} est assez petit on obtient l'équivalence des suites (Z_{lk}) et $(f_l \otimes b_{kl})$. Le début de la démonstration et le fait que la suite f_l soit associée à un arbre sur A nous permet alors de conclure.

Comme $(h_l \otimes h_k)_{l \geqq 2, k \geqq 2}$ engendre $L_0^p(L_0^r)$ il suffit de monter que ce dernier espace est isomorphe à $L^p(L^r)$. Ceci est une conséquence de deux remarques simples: Si E_1 et E_2 sont isomorphes alors $L^p(E_1)$ et $L^p(E_2)$ sont isomorphes et si E est un Banach, $L^p(E)$ et $L_0^p(E)$ sont isomorphes. CQFD

Remarque. En appliquant le même raisonnement aux indices q et s on voit que si ε_{kl} est assez petit, les suites (Z_{lk}) et $(f_l \otimes h_k)$ sont aussi équivalentes dans $L^q(L^s)$.

Etape 4. Dans cette étape, nous allons montrer que l'espace Z est complémenté.

Pour cela, montrons d'abord les propriétés (α), (β), (γ):

(α) Les suites Z_{lk}^* et $f_l^* \otimes h_k^*$ sont équivalentes dans $L^q(L^s)$.

Démonstration. Nous avons posé $Z_{lk}^* = Z_{lk}/P(\operatorname{Supp} Z_{lk})$. La remarque qui suit la proposition I.7 et le lemme I.6 montre que la suite Z_{lk}^* est équivalente, dans $L^q(L^s)$ à la suite

$$\frac{f_l}{P[\operatorname{Supp} f_l]} \otimes \frac{h_k}{P[\operatorname{Supp} h_k]} = f_l^* \otimes h_k^*.$$

(β) Les suites (Z_{lk}^*) de Z^* et $(f_l^* \otimes h_k^*)$ de F^* sont équivalentes.

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate de l'équivalence des suites (Z_{lk}) et $(f_l \otimes h_k)$ dans $L^p(L^r)$.

(γ) L'injection naturelle de F dans $L^q(L^s)$ est continue.

Démonstration. F n'est autre que l'espace $L_0^p(A, \mathcal{A}, L_0^r)$, F^* est engendré par la suite $(f_l^* \otimes h_k^*)_{l \geqq 2, k \geqq 2}$. Désignons par π la projection naturelle de $L^p(L^r)$ sur F. Si g est un élément de $L^p(L^r)$ on a $\pi(g) = E^{\mathcal{A}}(\Pi_A g_0) - \int_A g_0(t)dt$ avec $g_0(t) = g(t) - \int g(t)(u)du$.

Soit maintenant $\varphi = \sum_{k \geqq 2, l \geqq 2} \alpha_{kl} f_l^* \otimes h_k^*$ un élément de F^*. On a $\langle \varphi, g \rangle = \langle \varphi, \pi(g) \rangle$ donc

$$\|\varphi\|_{L^q(L^s)} = \sup_{\substack{g\in L^p(L^r)\\ \|g\|\leqq 1}} \langle \varphi, \pi(g)\rangle \leqq \sup_{\substack{f\in F\\ \|f\|\leqq\|\pi\|}} \langle \varphi, f\rangle = \|\pi\|\,\|\varphi\|_{F^*}.$$

Cette inégalité montre donc que l'injection de F^* dans $L^q(L^s)$ est continue.

Les trois propriétés (α), (β), (γ) nous montrent que si ψ est un élément de Z^* de la forme $\psi = \Sigma_{k,l}\,\alpha_{kl}Z^*_{lk}\,|_Z$ où les (α_{kl}) sont presque tous nuls, alors si on note encore ψ l'élément de $L^q(L^s)$ défini par

$$\psi = \sum_{k,l} \alpha_{kl}Z^*_{lk} = \sum_{l,k} \alpha_{kl}\frac{Z_{lk}}{P(\operatorname{Supp} Z_{lk})}$$

alors les normes de ψ dans Z^* et dans $L^q(L^s)$ sont équivalentes. On a donc une injection naturelle de Z dans $L^q(L^s)$ qui est continue. Sa transposée définit donc une projection de $L^p(L^r)$ sur Z et l'étape 4 est donc achevée et par conséquent la démonstration du théorème I.3.

Dans le second paragraphe, nous allons montrer comment on peut obtenir, à partir du théorème I.3, la primarité de $L^p(L^r)$.

II. Primarité de $L^p(L^r)$, $1 < p,\ r < \infty$

La démarche que nous allons suivre est tout à fait semblable à celle de [3] et nous ne donnerons pas ici les détails des calculs.

La méthode est essentiellement inspirée des travaux de Alspach, Enflo et Odell dans [2]. (e_j) désigne la base canonique de l_2.

Proposition II.1. *Let espaces $L^p(L^r)$ et $L^p(L^r(l_2))$ sont isomorphes si $r > 1$. Si p et r sont dans $]1,\infty[$, la suite $(h_k \otimes h_i \otimes e_j)$ est une base inconditionnelle de $L^p(L^r(l_2))$.*

Démonstration. La première partie est immédiate car on sait que L^r et $L^r(l_2)$ sont isomorphes pour $r > 1$.

Pour la seconde partie, on remarque que, d'après la démonstration de la proposition I.1, L^r possède la propriété I_p, donc aussi $L^r(l_2)$. En utilisant cette remarque et en faisant un calcul du même type qu'à la proposition I.1, on montre que si (α_{kij}) sont des réels presque tous nuls et si on pose

$$\Delta = \left\| \sum_{k,i,j} \alpha_{kij}h_k \otimes h_i \otimes e_j \right\|^p$$

alors $\Delta \approx \int\{\int(\Sigma_{k,i,j}\,\alpha^2_{kij}h^2_k(t)h^2_i(u))^{r/2}du\}^{p/r}dt$. Cette expression ne dépendant que du carré des coéfficients α_{kij}, cela montre que la suite est inconditionnelle.

CQFD

THEOREME II.2. *Si p et r sont dans $]1, +\infty[$, $L^p(L^r)$ est primaire.*

DÉMONSTRATION. En utilisant la proposition II.1 et la méthode de décomposition de Pelczynski, on se ramène à monter que pour tout opérateur T de $L^p(L^r(l_2))$, l'un des deux espaces Im T ou Im$(I-T)$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(L^r)$.

On pose $\beta_{kij} = \langle T(h_k \otimes h_i \otimes e_j), (h_k \otimes h_i \otimes e_j)\rangle$, $\beta'_{kij} = \langle (I-T)(h_k \otimes h_i \otimes e_j), (h_k \otimes h_i \otimes e_j)\rangle$.

$\beta'_{kij} \geqq \frac{1}{2}$ pour une infinité de $j\}$. Comme $\beta_{kij} + \beta'_{kij} = 1$ il est facile de voir que $\Phi_i \cup \Phi'_i = \mathbb{N}$ et par conséquent $\hat{\Phi}_i \cup \hat{\Phi}'_i = [0,1]$. Posons alors

$$M_t = \{i\,; t \in \hat{\Phi}_i\}, \qquad M'_t = \{i\,; t \in \hat{\Phi}'_i\}.$$

Il est clair que $M_t \cup M'_t = \mathbb{N}$, donc $\hat{M}_t \cup \hat{M}'_t = [0,1]$. On peut donc supposer, en remplaçant au besoin T par $(I-T)$, que $A = \{t; P(M_t) \geqq \frac{1}{2}\}$ est de mesure positive.

Nous allons construire dans Im T un sous-espace complémenté isomorphe à l'espace engendré dans $L^p(L^r)$ par la suite $(h_k \otimes h_i)_{i \geqq 1, k \in \Phi_i}$ qui est isomorphe à $L^p(L^r)$ d'après le théorème I.3.

Pour cela, on munit l'ensemble $\Omega = \{(k,i);\ i \geqq 1,\ k \in \Phi_i\}$ d'une relation d'ordre total et on construit par récurrence des indices $J(k,i)$ deux à deux distincts, tels que

(1) $\beta_{kij(k,i)} \geqq \frac{1}{2}$ pour tout (k,i) dans Ω.

(2) Il existe des blocs y_{ki} de la base de $L^p(L^r(l_2))$ tels que

$$\| T'(h_k \otimes h_i \otimes e_{j(k,i)}) - y_{ki} \| < \frac{\delta}{2^{k+i+1}}$$

(ceci est possible car lorsque j tend vers ∞, $h_k \otimes h_i \otimes e_j$ tend vers 0 faiblement).

Si δ est assez petit, on peut alors utiliser le lemme 1 de [2] et on obtient le résultat suivant:

(a) La suite $T(h_k \otimes h_i \otimes e_{j(k,i)})_{(k,i)\in\Omega}$ est équivalente à la suite $(h_k \otimes h_i \otimes e_{j(k,i)})_{(k,i)\in\Omega}$.

(b) L'espace qu'elle engendre est complémenté dans $L^p(L^r(l_2))$. Or, si $(\alpha_{ki})_{(k,i)\in\Omega}$ est une famille de réels presque tous nuls on montre facilement que

$$\Big\| \sum_{(k,i)\in\Omega} \alpha_{ki} h_k \otimes h_i \otimes e_{j(k,i)} \Big\|_{L^p(L^r(l_2))} \approx \Big\| \sum_{(k,i)\in\Omega} \alpha_{ki} h_k \otimes h_i \Big\|_{L^p(L^r)}.$$

On a donc construit dans (Im T) le sous-espace cherché et ceci achève la démonstration du théorème II.2.

Bibliographie

1. D. J. Aldous, *Unconditional bases and martingales in $L^p(F)$*, Proc. Camb. Phil. Soc. **85** (1979).

2. D. E. Alspach, P. Enflo and E. Odell, *On the structure of separable $\mathcal{L}_p$ spaces*, Studia Math. **60** (1977).

3. M. Capon, *Primarité de $L^p(l_r)$*, $1 < p$, $r < \infty$, Israel J. Math. **36** (1980), 346–364.

4. J. L. B. Gamlen and R. J. Gaudet, *On subsequences of the Haar system in $L^p[0,1]$*, $1 < p < \infty$, Israel J. Math. **15** (1973), 404–413.

5. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II, Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

6. B. Maurey, *Système de Haar*, Séminaire Maurey–Schwartz 1974–75, éxposé No. 2.

7. G. Pisier, *Les inégalités de Khintchine–Kahane*, Séminaire Maurey–Schwartz 1977–78, éxposé No. 7.

Université de Paris-Sud
91405 Orsay, Paris, France